Chapitre 12
Probabilités sur un univers dénombrable

Exercice 1 : D'après le cours, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Ainsi, la série de terme générale $P(A_n)$ converge, donc la suite $(P(A_n))$ converge vers 0.

Exercice 2 : On note A l'évènement dont on veut calculer la probabilité et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement « les $n-1$ premiers lancer donne 2 ou 4 et le n-ième lancers donne 6 ». Comme les A_n sont des évènements incompatibles, on a

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

Si on note B_i l'évènement « la i-ième lancer donne 2 ou 4 » et C_i l'évènement « le i-ième lancer donne un 6 », on a par indépendance

$$P(A_n) = P(B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap C_n) = P(B_1)\cdots P(B_{n-1})P(C_n) = \frac{1}{3^{n-1}}\frac{1}{6}.$$

Finalement, avec la formule donnant la somme d'une série géométrique, on a

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-1}}\frac{1}{6} = \frac{1/6}{1-1/3} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 3 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement « l'erreur n'est pas corrigé durant la n-ième relecture ». On souhaite calculer la probabilité de l'évènement $A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Par indépendance, on a

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\cdots P(A_n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

2. Pour $j \in [\![1,3]\!]$, on note B_j l'évènement « l'erreur numéro j est corrigé à l'issue de la n-ième relecture ». On souhaite calculer la probabilité de l'évènement $B_1 \cap B_2 \cap B_3$. Avec le résultat de la question précédente, et par indépendance, on a

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= P(B_1)P(B_2)P(B_3) \\ &= (1-P(\bar{B}_1))(1-P(\bar{B}_2))(1-P(\bar{B}_3)) \\ &= \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)^3. \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, il faut résoudre l'inéquation

$$\begin{aligned} \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)^3 \geqslant 0,95 &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant 1-(0,95)^{1/3} \\ &\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(1-(0,95)^{1/3})}{\ln(3/4)} \simeq 14,17 \end{aligned}$$

Donc il faut 15 relectures au minimum.

Exercice 4 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement « le joueur 1 atteint la cible au n-ième tir » et B_n l'évènement « le joueur 2 atteint la cible au n-ième tir ». Le joueur 1 gagne est l'évènement

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \underbrace{(\bar{A}_1 \cap \bar{B}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_{n-1} \cap \bar{B}_{n-1} \cap A_n)}_{C_n}.$$

Par indépendance, on a

$$P(C_n) = P(\bar{A}_1)P(\bar{B}_1)\cdots P(\bar{A}_{n-1})P(\bar{B}_{n-1})P(A_n) = [(1-p_1)(1-p_2)]^{n-1}p_1,$$

puis, on en déduit en utilisant la somme d'une série géométrique

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p_1)(1-p_2)]^{n-1}p_1 = \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}.$$

2. En notant B l'évènement « le joueur 2 gagne », on obtient en procédant comme dans la question précédente
$$P(B) = \frac{(1-p_1)p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}.$$
L'évènement « le jeu se termine » est $A \cup B$, et on a
$$P(A\cup B) = P(A)+P(B) = \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2} + \frac{(1-p_1)p_2}{p_1+p_2-p_1p_2} = 1,$$
donc le jeu se termine quasi-certainement.
3. Le jeu est équitable si et seulement si
$$P(A) = P(B) \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = (1-p_1)p_2 \quad \Leftrightarrow \quad p_2 = \frac{p_1}{1-p_1} \text{ si } p_1 \neq 1.$$
Avec cette relation, la condition $p_2 \in]0,1]$ est vérifiée si et seulement si $p_1 \leqslant 1/2$. Finalement, le jeu est équilibré si et seulement si
$$0 < p_1 \leqslant 1/2 \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}.$$

Exercice 5 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n l'évènement « on fait face au n-ième lancer ».
$$\begin{aligned}
p_2 &= P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2) = P(\bar{F}_1)P(\bar{F}_2) = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{9},\\
p_3 &= P(F_1 \cap \bar{F}_2 \cap \bar{F}_3) = P(F_1)P(\bar{F}_2)P(\bar{F}_3) = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{27},\\
p_4 &= P(F_1 \cap F_2 \cap \bar{F}_3 \cap \bar{F}_4) + P(\bar{F}_1 \cap F_2 \cap \bar{F}_3 \cap \bar{F}_4)\\
&= P(F_1)P(F_2)P(\bar{F}_3)P(\bar{F}_4) + P(\bar{F}_1)P(F_2)P(\bar{F}_3)P(\bar{F}_4)\\
&= \frac{4}{81} + \frac{8}{81} = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}.
\end{aligned}$$
2. On utilise le système complet d'évènement F_1, $\bar{F}_1 \cap F_2$ et $\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2$ avec la formule des probabilités totales
$$\begin{aligned}
p_{n+2} &= P(X=n+2) = P(X=n+2 \mid F_1)P(F_1)\\
&+P(X=n+2 \mid \bar{F}_1\cap F_2)P(\bar{F}_1\cap F_2) + P(X=n+2 \mid \bar{F}_1\cap \bar{F}_2)P(\bar{F}_1\cap\bar{F}_2),
\end{aligned}$$
d'où en simplifiant
$$p_{n+2} = \frac{1}{3}\times P(X=n+2 \mid F_1) + \frac{2}{9}\times P(X=n+2 \mid \bar{F}_1 \cap F_2).$$
Or, si l'on sait que l'on a fait face au premier lancer, il reste $n+1$ lancer où il faut obtenir le double pile pour la première fois au $n+1$-ème lancer. En raisonnement de même si on fait pile, puis face, on obtient
$$p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n.$$
3. La suite (p_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée
$$x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = \left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right).$$
On en déduit qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = a\left(\frac{2}{3}\right)^n + b\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$
En évaluant l'expression pour $n=2$ et $n=3$, on conclut que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$
4. Rappelons que l'on a la formule
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$
On en déduit que X admet une espérance car la série de terme général
$$|nP(X=n)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

est convergente, puis que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n) = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{-1}{3}\right)^n \\ &= \frac{2}{3}\frac{2/3}{(1-2/3)^2} + \frac{4}{3}\frac{-1/3}{(1+1/3)^2} = \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 6 :

1. (a) Par la formule des probabilités composées, on a pour $k \in [\![1, n]\!]$

$$P(X \geqslant k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-k}{n-k+1} = \frac{n-k}{n}.$$

   (b) En utilisant la formule précédente, on a

$$P(X = k) = P(X \geqslant k) - P(X \geqslant k+1) = \frac{n-k}{n} - \frac{n-k-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

   Ainsi X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

   (c) L'espérance d'une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ est $\mathrm{E}(X) = (n+1)/2$.

2. (a) On se trouve dans la situation où X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1/n$.

   (b) D'après le cours, X admet une espérance et $\mathrm{E}(X) = n$.

Exercice 7 : Par le théorème du transfert, l'espérance de $1/X$ existe si et seulement si la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{p(1-p)^{k-1}}{k}}_{u_k}$$

est absolument convergente. Or, on a

$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{p(1-p)^k}{k+1}\frac{k}{p(1-p)^{k-1}} = \frac{k}{k+1}(1-p) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1-p,$$

donc la série converge absolument par la règle de d'Alembert. On a alors

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p(1-p)^{k-1}}{k} = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^k}{k} = -\frac{p}{1-p}\ln(p).$$

Exercice 8 : Par le théorème du transfert, l'espérance de $1/(X+1)$ existe si et seulement si la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{\lambda^k}{(k+1)!}e^{-\lambda}}_{u_k}$$

est absolument convergente. Or, on a

$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{\lambda^{k+1}e^{-\lambda}}{(k+2)!}\frac{(k+1)!}{\lambda^k e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{k+2} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc la série converge absolument par la règle de d'Alembert. On a alors

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}(e^\lambda - 1)}{\lambda} = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Exercice 9 :

1. Tout les couples ont un garçons et X enfants, donc $P = 1/X$.
2. Les couples continuent à faire un enfant tant qu'ils n'ont pas un garçon. Ainsi, X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1/2$.
3. Par le théorème du transfert, l'espérance de $P = 1/X$ existe si et seulement si la série
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{k2^k}}_{u_k}$$
est absolument convergente. Or, on a
$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{k2^k}{(k+1)2^{k+1}} = \frac{k}{2(k+1)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$
donc la série converge absolument par la règle de d'Alembert. On a alors
$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1/2)^k}{k} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2).$$

Exercice 10 :

1. On doit avoir
$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1 \Leftrightarrow a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$
Or l'on a
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$
donc $a = 1$.
2. La variable aléatoire X n'admet pas d'espérance car la série de terme général $nP(X = n) = 1/(n+1)$ ne converge pas absolument.

Exercice 11 :

1. On doit avoir
$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1 \Leftrightarrow a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = 1.$$
Or l'on a
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} - \frac{1}{2}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4},\end{aligned}$$
donc $a = 4$.
2. La variable aléatoire X admet une espérance car la série de terme général $nP(X = n) = 4/(n+1)(n+2)$ converge absolument d'après la règle de Riemann. De plus,
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(n+1)(n+2)}.$$
Or l'on a
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$
donc $\mathrm{E}(X) = 2$.

Exercice 12 : D'après l'énoncé, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad P(X=k \mid N=n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On en déduit que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=k \mid N=n)P(N=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{\ell}}{\ell!} \\
&= \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} e^{(1-p)\lambda} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda},
\end{aligned}$$

donc X suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

Exercice 13 :

1. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note F_i l'évènement « on fait face au i-ième lancer ». On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors par la formule des probabilités totales selon la position du premier pile

$$\begin{aligned}
P(X=n) &= \sum_{i=1}^{n+1} P(F_1 \cap \cdots F_{i-1} \cap \bar{F}_i \cap F_{i+1} \cap \cdots \cap F_{n+1} \cap \bar{F}_{n+2}) \\
&= (n+1)(1-p)^n p^2.
\end{aligned}$$

2. La variable aléatoire X admet une espérance si la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{n(n+1)(1-p)^n p^2}_{u_n}$$

converge absolument. Or, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)(n+2)(1-p)^{n+1}p^2}{n(n+1)(1-p)^n p^2} = \frac{(n+1)(n+2)(1-p)}{n(n+1)} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 1-p,$$

donc la série converge absolument par la règle de d'Alembert. En utilisant la formule

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)nx^n = \frac{2x}{(1-x)^3},$$

on obtient

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)(1-p)^n p^2 = \frac{2p^2(1-p)}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p}.$$

Exercice 14 :

1. Soit Y suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Par la formule des probabilités totales

$$P(Y > m) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} P(Y=k) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p = (1-p)^m > 0.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
P(Y > m+n \mid Y > m) &= \frac{P((Y > m+n) \cap (Y > m))}{P(Y > m)} \\
&= \frac{P(Y > m+n)}{P(Y > m)} = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} \\
&= (1-p)^n = P(Y > n),
\end{aligned}$$

donc la loi géométrique de paramètre p est sans mémoire.

2. En prenant $m = n = 0$ dans l'hypothèse, on obtient

$$P(X > 0) = P(X > 0 \mid X > 0) = 1.$$

3. En prenant $n = 1$ dans l'hypothèse, on obtient

$$P(X > m+1 \mid X > m) = P(X > 1),$$

que l'on peut réécrire

$$P(X > m+1) = P((X > m+1) \cap (X > m)) = P(X > 1)P(X > m).$$

4. Notons $q = P(X > 1) \in]0,1]$. D'après la question précédente, la suite $(P(X > m))$ est géométrique de raison q, donc on a

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad P(X > m) = P(X > 1)q^{m-1} = q^m.$$

Finalement, on trouve

$$P(X = m) = P(X > m-1) - P(X > m) = q^{m-1} - q^m = q^{m-1}(1-q),$$

donc X suit une loi géométrique de paramètre $q = 1 - p$.

Exercice 15 :

1. Par la formule des probabilités totales, on a

$$p = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-a}$$
$$q = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^{2k}}{(2k)!} e^{-a}.$$

On en déduit que $p + q = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-a}$ et que

$$p - q = e^{-a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n!} = e^{-a}(1 - e^{-a}),$$

donc

$$p = \frac{1}{2}(1 - e^{-2a}) \qquad \text{et} \qquad q = \frac{1}{2}(1 - e^{-a})^2.$$

2. Notons G le gain de Pierre. On peut écrire

$$G = \left\{ \begin{array}{rll} -X & \text{si} & X \text{ est pair} \\ X & \text{si} & X \text{ est impair} \end{array} \right\} = (-1)^{X+1} X.$$

Par le théorème du transfert, G admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} n P(X = n)}_{u_n}$$

est absolument convergente. Or l'on a $|u_n| = nP(X = n)$ qui est le terme général d'une série convergente, car la loi de Poisson admet une espérance. Finalement,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(G) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n \frac{a^n}{n!} e^{-a} \\ &= e^{-a} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{(n-1)!} = a e^{-a} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (-1)^{\ell} \frac{a^{\ell}}{\ell!} = a e^{-2a}. \end{aligned}$$

L'espérance des gains de Pierre est donc ae^{-2a} et celle de Paul est $-ae^{-2a}$.

3. Pierre est avantagé dans ce jeu, car la moyenne de ses gains est positive, tandis que celle de Paul est négative.